Leçon 154 - Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

Cadre : E est un K-ev de dimension finie n.

1. Sous-espaces stables par un endomorphisme. —

1. Sous-espaces stables, endomorphismes induits, bases adaptées. —

- Def : Un s-ev F de E est dit f-stable ssi $f(F) \subset F$.
- Ex : $\{0\}$,E sont toujours f-stables.
- Ex : Pour p un projecteur sur F parallèlement à V, F et V sont p-stables.
- Ex : Pour r une rotation de $\mathbb{R}^2$, r ne laisse aucune droite vectorielle stable.
- Pro : $Ker(f)$ et $Im(f)$ sont f-stables.
- Pro : Si u et v commutent alors $Ker(v)$ et $Im(v)$ sont u-stables.
- Cor : Pour tout $P \in K[X]$, $Ker(P(f))$ est f-stable.
- Pro : f laisse stable tous les s-ev de dimension k, pour un certain $k \in \{1, .., n\}$ fixé, ssi f est une homothétie.
- Def : Soit $f \in End(E)$ et F qui est f-stable. On définit alors $f|_F \in End(F)$ la restriction de f à F, et $\overline{f} : E/F \to E/F \in End(E/F)$ obtenu par passage au quotient.
- Lemme : Pour F f-stable, $B = \{e_1, .., e_n\}$ une base de E telle que $B_F := \{e_1, .., e_r\}$ est une base de F, en notant $B' := \{e_{r+1}, .., e_n\}$ et $\pi : E \to E/F$, on a alors : $Mat(f, B) = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ où $A = Mat(f|_F, B_F)$ et $B = Mat(\overline{f}, \pi(B'))$.
- Rem : Dans le cas où C=0, alors $Vect(B')$ est un supplémentaire de F qui est f-stable.
- Rem : En écrivant E comme une somme directe de s-ev f-stables, l'étude de f se ramène à l'étude des restrictions de f à chacun des s-ev stables.
- Ex : Pour p un projecteur, on a $E = Ker(p) \oplus Im(P)$ avec $p|_{Ker(p)} \equiv 0$ et $p|_{Im(p)} \equiv Id_{Im(p)}$.
- Ex : Pour $car(K) \neq 2$ et s une involution, on a $E = Ker(s + Id) \oplus Ker(s - Id)$ avec $s|_{Ker(s+Id)} \equiv -Id_{Ker(s+Id)}$ et $s|_{Ker(s-Id)} \equiv Id_{Ker(s-Id)}$

2. Sous-espaces stables et dualité. —

- Def+Pro : Pour $A \subset E$ on définit $A^\perp := \{\varphi \in E' \text{ tq } \varphi(x) = 0 \forall x \in A\}$ l'orthogonal de A dans E'.
  C'est un s-ev de E', et on a $A^\perp = (Vect(A))^\perp$.
- Pro : Pour $f \in End(E)$ on définit $f^t : \varphi \in E' \mapsto \varphi \circ f \in E' \in End(E')$.
- Pro : Un s-ev F est f-stable $\Leftrightarrow$ $F^\perp$ est f^t-stable.
- Pro : $dim(F) + dim(F^\perp) = dim(E)$.
- Rem : On peut ainsi chercher les hyperplans stables de l'endomorphisme f en cherchant les droites stables de f^t.
- Exemple de sous-espaces stables de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Applications à la réduction. —

1. Sous-espace propre, sous-espace caractéristique. —

- Def+Pro : Pour $f \in End(E)$, $\{P \in K[X] \text{ tq } P(f) = 0\}$ est un idéal de $K[X]$.
  Il existe un unique polynôme unitaire qui engendre cet idéal, et on l'appelle polynôme minimal μ_f de f.
- Def+Pro : Pour $f \in End(E)$ et B une base de E, on définit $\chi_f(X) := det(Mat(f, B) - XI_n)$ le polynôme caractéristique de f.
  χ_f ne dépend pas de la base choisie.
- Def : Pour λ une valeur propre de f, on définit le sous-espace propre associé à λ comme $Ker(f - \lambda I_d)$.
  On définit le sous-espace caractéristique associé à λ comme $Ker((f - \lambda I_d)^m)$, où $m \geq 1$ est la multiplicité de $(X - \lambda)$ dans $\mu_f(X)$.
- Pro : Pour tout F s-ev f-stable, on a $\chi_f = \chi_{f|_F} . \chi_{\overline{f}}$.
- App : χ_f est irréductible sur K ssi f n'admet aucun sous-espace stable non trivial.
- Pro : Si $E = F \oplus G$ avec F, G f-stables, alors $\mu_f = ppcm(\mu_{f|_F}, \mu_{f|_G})$.

2. Lemme des noyaux et conséquences. —

- Lemme des noyaux : Soit $P = P_1..P_r \in K[X]$ avec P_i premiers entre eux.
  Alors $Ker(P(f)) = \oplus_i Ker(P_i(f))$.
- App : Les sous-espaces caractéristiques de f sont en somme directe.
- Def : $f \in End(E)$ est diagonalisable/trigonalisable si il existe une base B de E dans laquelle $Mat(f, B)$ est diagonale/triangulaire supérieure.
- Thm : On a les équivalences :
- Thm : On a les équivalences :
  i) Il existe une base B dans laquelle $Mat(f, B)$ est diagonale.
  ii) μ_f est scindé à racines simples dans K.
  iii) χ_f est scindé dans K et $dim(Ker(f - \lambda Id)) = v_\lambda$ pour tout λ racine de χ_f.
  iv) Il existe un polynôme scindé à racines simples dans K qui annule f.
  v) $E = \oplus_{\lambda \in Sp_K(f)} Ker(f - \lambda Id)$
- Ex : Les projecteurs et les symétries sont toujours diagonalisables (sauf si $car(K) = 2$)
- Ex : Les endomorphismes nilpotents non-nuls ne sont jamais diagonalisables.
- Ex : Les matrices de rotations de $\mathbb{R}^2$ ne sont pas diagonalisables dans $M_2(\mathbb{R})$ mais le sont dans $M_2(\mathbb{C})$
- Thm : Soit $f \in End(E)$. On a les équivalences :
  i) f est trigonalisable dans E.
  ii) χ_f est scindé sur K.

iii) μ_f est scindé sur K.
iv) Il existe $P \in K[X]$ scindé tel que $P(f) = 0$.

- Cor : Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.
- Ex : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
- Cor : Si F est f-stable et f diagonalisable/trigonalisable, alors $f|_F$ est diagonalisable/trigonalisable.
- **Dev** : Décomposition de Jordan-Chevalley : Soit $\mathbb{K}$ un corps et E un $\mathbb{K} - ev$ de dimension n. Soit $f \in End(E)$ tel que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.
  Alors il existe un unique couple $(d, n) \in End(E)^2$ tel que :
  i) d est diagonalisable, n est nilpotent.
  ii) f = d + n.
  iii) n et d commutent.
  iv) d et n sont des polynômes en f.
- Méthode de calcul de D et N via une méthode de Newton polynomiale.
- Pro : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et $A = D + N$ la décomposition de Dunford de A, on a : $exp(A) = exp(D). \sum_{k=0}^{r-1} \frac{N^k}{k!}$, où r est l'indice de nilpotence de N.
  La décomposition de Dunford de exp(A) est ainsi $exp(A) = exp(D) + exp(D)(N + \frac{N^2}{2} + .. + \frac{N^{r-1}}{(r-1)!}$.
- App : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, f est diagonalisable $\Leftrightarrow$ $exp(f)$ est diagonalisable.
- Ex : Les sous-espaces stables de $Diag(1, 2, .., n)$ sont exactement les $Vect((e_i)_{i \in I})$ pour tout $I \subset \{1, .., n\}$.

3. Réduction simultanée. —

- Pro : Si u et v commutent alors $Im(u)$ et $Ker(u - \lambda Id)$ sont v-stables.
- Thm : Soit $(u_i)_i$ une famille quelconque d'endomorphismes diagonalisables/trigonalisables qui commutent.
  Alors il existe une base B de E dans laquelle toutes les $Mat(u_i, B)$ sont diagonales/triangulaires supérieures.
- App : Un sous-groupe abélien G de matrices diagonalisables de$Gl_n(K)$ est semblable à un sous-groupe de matrices diagonales.
- App :Soit K tel que $car(K) \neq 2$. Alors $Gl_n(K) \simeq Gl_m(K)$ ssi $m = n$.
- Pro : $\phi_{M,N} : X \mapsto MX - XN$ est diagonalisable dans $End(M_n(K))$ ssi M,N sont diagonalisables dans $M_n(K)$.
- **Dev** : Soit G le groupe des quaternions de norme 1. Alors $G/\{\pm 1\} \simeq SO_3(\mathbb{R})$.
- Rem : Cet isomorphisme, permet de ramener le calcul de l'image d'un vecteur de $\mathbb{R}^3$ par une rotation à des produits dans $\mathbb{H}$ en identifiant les vecteurs $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ du repère orthonormé canonique de $\mathbb{R}^3$ aux éléments i,j,k de $\mathbb{H}$.

3. Endomorphismes remarquables. —

1. Endomorphismes semi-simples. —

- Def : $f \in End(E)$ est dit semi-simple ssi tout s-ev F qui est f-stable admet un supplémentaire f-stable.
- **Dev** Thm : On a l'équivalence :
  i) f est semi-simple.
  ii) μ_f est sans facteurs carrés.
  iii) Il existe une extension de corps L/K telle que μ_f est scindé à racines simples sur L.
  iv) Il existe une extension de corps L/K telle que $Mat(f, B)$ est diagonalisable dans $M_n(L)$.
- Cor : Les endomorphismes semi-simples sont donc une généralisation des endomorphismes diagonalisables.
- Ex : Les rotations de $\mathbb{R}^2$ sont semi-simples sur $\mathbb{R}$.

2. Endomorphismes normaux. —

- On se place ici sur E euclidien ou hermitien, muni d'un produit scalaire.
- Pro+Def : Pour tout $f \in End(E)$, il existe un unique $f^* \in End(E)$ tel que $\forall x, y \in E$, $< f(x), y >=< x, f^*(y) >$.
  f^* est appelé adjoint de f, et $f \mapsto f^*$ est un endomorphisme involutif de $End(E)$.
- Ex : Pour p un projecteur, $p^* = p$.
- Pro : Dans le cas euclidien, $Mat(f^*, B) = Mat(f, B)^t$. Dans le cas hermitien, $Mat(f^*, B) = \overline{Mat(f, B)}^t$.
- Def : f est un endomorphisme normal ssi $f^* f = f f^*$.
- Ex : Les matrices symétriques réelles, antisymétriques réelles ($M = -M^t$), hermitiennes, orthogonales réelles ($MM^t = I_n$) définissent des endomorphismes normaux.
- Pro : Soit f endomorphisme normal et E_λ un sous-espace propre de f. Alors $E_\lambda^\perp$ est f^*-stable et f-stable.
- Théorème de réduction des endomorphismes normaux : Soit f un endomorphisme normal. Il existe une base orthonormée B de E dans laquelle on a :
  $Mat(f, B) = Diag(\lambda_1, .., \lambda_r, P_1, .., P_s)$ avec $\lambda_i \in \mathbb{R}$ et $P_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$, $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.
- App : Pour M symétrique réelle/hermitienne, M est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.
  Pour M antisymétrique réelle, les P_j sont de la forme $\begin{pmatrix} 0 & -b_j \\ b_j & 0 \end{pmatrix}$.
  Pour M orthogonale, les P_j sont de la forme $\begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ avec $a_j^2 + b_j^2 = 1$.
- App : Les matrices antisymétriques réelles, orthogonales sont diagonalisables sur $\mathbb{C}$.
- App : $exp : A_n(\mathbb{R}) \mapsto SO_n(\mathbb{R})$ est surjective.

Références

Gourdon : Orthogonal dans le dual, transposée, matrice, F u-stable ssi $F^\perp$ u^t-stable, réduit la dimension des espaces stables à chercher. Polynôme caractéristique, exemple, lien avec $\chi_{u|_F}$. Lemme des noyaux, CNS diagonalisabilité, CNS trigonalisabilité, exemples, applications, Décomposition de Jordan-Chevalley.(Dev), décompo de $exp(A)$. Réduction

simultanée. Endomorphismes semi-simples.(Dev), exemple. Endomorphismes normaux, réduction des endomorphismes normaux, cas de $S_n(\mathbb{R})$,$A_n(\mathbb{R})$,$O_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$ connexe, exemples, exp $A_n(\mathbb{R}) \to SO_n(\mathbb{R})$ surjective.
Objectif Agrégation : Sous-espace stable, Im et Ker, $u|_F$ et $\overline{u}$, forme matricielle associée à un s-espace stable, exemple symétrie et projecteur.
Caldero, Germoni : Réduction simultanée, $Gl_n \simeq Gl_m$ ssi $m = n$, $SO_3(\mathbb{R})$ et les quaternions.(Dev)
FGN (Algèbre 1) : si u stabilise les s-ev de dim k alors u homothétie.
Madère : Exemple de calcul de sous-espaces stables d'une matrice.
Ulmer : Théorie des représentations linéaires, représentations irréductibles, représentations de degrés 1, Th de Mashke, Lemme de Shur.

June 3, 2017

Vidal Agniel, *École normale supérieure de Rennes*